جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تاریخ تحویل: ۲۲ مهر

پاسخنامه تمرین سری اول

۱. • برای یکتایی نیاز است که تمام درایه های قطری L ، ۱ باشند و A=LU نیز وارون پذیر باشد. تحت این شرایط است که تجزیه LU در صورت وجود،منحصر به فرد خواهد بود. اثبات:

$$L_1U_1 = L_1U_2$$

فرض که L_1, L_2 پایین مثلثی با درایه های قطری ۱ هستند و U_1, U_2 ماتریس های بالا مثلثی وارون پذیرند(چون A وارون پذیر است ، U_1, U_2 هم باید وارون پذیر باشند)
داریم:

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

در این رابطه عبارت سمت چپ یک ماتریس پایین مثلثی با درایه های قطری ۱ و عبارت سمت راست یک ماتریس بالا مثلثی است .برابری این دو عبارت تنها زمانی ممکن است که :

$$L_2^{-1}L_1 = U_2^{-1}U_1 = I$$

• تجزیه‌ی LU این ماتریس به صورت زیر است:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

اکنون با تولید ۲ معادله‌ی جدید جواب نهایی را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} LUX = b \\ UX = Y \\ LY = b \end{cases}$$

از حل معادله‌ی $LY = b$ داریم:

$$Y = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -16 \end{pmatrix}$$

در نهایت کافی‌ست معادله‌ی $UX = Y$ را حل کنیم.

$$X = \begin{pmatrix} ۴ \\ ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$$

۲. نزدیک ترین تجزیه به LDL^T به صورت روبه‌رو خواهد بود: $A_\theta = LDU$

$$L = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ \tan & ۱ \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{\cos} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} ۱ & -\tan \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

شرط لازم برای آن‌که $U = L^T$ باشد، این است که زاویه دوران، مضرب صحیحی از π باشد.

۳. ابتدا فرض کنید A_i ها وارون‌پذیرند، پس برای هر i ، $A_i^{-۱}$ موجود است. حال کافی‌ست $A^{-۱}$ را به‌صورت زیر بگیرید:

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix} A_۱^{-۱} & & & \\ & A_۲^{-۱} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-۱} \end{pmatrix}$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $AA^{-۱} = I$ پس A وراون‌پذیر است.
به عکس فرض کنید A وارون پذیر بوده و ماتریس بلوکی زیر $A^{-۱}$ باشد:

$$A^{-۱} = \begin{pmatrix} B_{۱۱} & B_{۱۲} & \dots & B_{۱k} \\ B_{۲۱} & B_{۲۲} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_{k۱} & B_{k۲} & & B_{kk} \end{pmatrix}$$

از طرفی می‌دانیم $AA^{-۱}$ برابر I است، پس

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} A_1B_{11} & A_1B_{12} & \dots & A_1B_{1k} \\ A_2B_{21} & A_2B_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_kB_{k1} & A_kB_{k2} & & A_kB_{kk} \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} I_1 & & & \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_k \end{pmatrix}$$

از تساوی آخر نتیجه می‌شود:
$A_iB_{ii} = I_i$ پس A_i ها نیز وارون‌پذیرند.

۴. باید عبارت مقابل را ثابت کنیم:

$$a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_1T(v_1) = 0$$

با توجه به خاصیت نگاشت خطی داریم:

$$\longrightarrow T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n)$$

چون T یک به یک است پس $Null(T) = 0$

$$\longrightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$$

چون $v_1, \dots, v_n$ مستقل خطی اند پس $a_1 = a_2 = \dots a_n = 0$ نتیجه $T(v_1), \dots T(v_n)$ هم مستقل خطی هستند.

۵. مرحله اول: صفر کردن درایه های اضافی ستون اول دو درایه ی دلخواه را بعد از تغییرات مرحله اول بررسی می کنیم.فرض برای $a_{ij},\ \ a_{ji},\ \ i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \times a_{1j}$$

$$a_{ji}^{(2)} = a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} \times a_{1i}$$

$a_{ij}^{(2)} = a_{ji}^{(2)}$ زیرا می دانیم A متقارن است پس $a_{ij} = a_{ji}$ همچنین $a_{i1} = a_{1i}, a_{1j} = a_{j1}$ پس تساوی $a_{ij}^{(2)} = a_{ji}^{(2)}$ برقرار است.چون i،j دلخواه بودند پس ثابت شد که پس از مرحله ی اول قسمت باقیمانده نیز متقارن است. حال چون این ماتریس باقی مانده نیز متقارن است به کمک استقراء به راحتی ثابت می شود با یک مرحله حذف دیگر ماتریس باقیمانده جدید نیز همین خاصیت را دارد.

۶. • قسمت اول:
بله، بعنوان مثال فرض کنید که $u = (۱, ۰), v = (-\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}), w = (-\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ باشند. در این‌صورت حاصل ضرب داخلی هر دوتا از آن‌ها برابر $-\frac{۱}{۲}$ خواهدبود.

• قسمت دوم:
با توجه به رابطه زیر که برای محاسبه ضرب داخلی داریم، عمل می‌کنیم.

$$u.v = |u| \times |v| cos(\theta)$$

پس برای منفی شدن حاصل ضرب داخلی دو بردار، کافی است که زاویه بین آن دو بردار بیش از ۹۰ درجه و کمتر از ۲۷۰ درجه باشد. از طرفی می‌دانیم که حداکثر میتوانیم ۴ بردار در صفحه داشته‌باشیم که دوبه‌دو با هم زاویه ۹۰ درجه دارند و این کار تنها به یک روش صورت می‌پذیرد و این حالت همان است که ۴ بردار تشکیل یک بعلاوه بر روی محورهای مختصاتی دهند و می‌دانیم که در این حالت حاصل ضرب داخلی دوبه‌دو بردارها صفر است و منفی نیست. لذا نتیجه می‌گیریم که حداکثر ۳ بردار در صفحه خواهیم داشت که حاصل ضرب داخلی دوبه‌دوی آن‌ها منفی است.

۷. • قسمت اول:
فرض کنید که x و y دو عدد حقیقی باشند، حال برای اثبات استقلال خطی داریم:

$$x(۱ + i) + y(۱ - i) = ۰ \Rightarrow (x + y) + (x - y)i = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = ۰ \\ x - y = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = y = ۰ \Rightarrow$$

دو بردار مذکور مستقل خطی‌اند.

• قسمت دوم:
در این حالت مثال زیر را درنظر بگیرید:

$$i(۱ + i) + ۱(۱ - i) = (i - ۱) + (۱ - i) = ۰$$

در حالی که نه i و نه ۱ ، صفر نیستند فلذا دو بردار مذکور در این حالت وابسته خطی‌اند.

۸. می‌توانیم شرایط زیر را درنظر بگیریم :

$$x(۴, ۸, ۹) + y(۵, ۷, ۹) = (۶, ۸, t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۴x + ۵y = ۶ \\ ۸x + ۷y = ۸ \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}, x = -\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow t = ۹(x + y) = ۹ \times \frac{۷}{۶} = \frac{۲۱}{۲} = ۱۰/۵$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۶}(۴, ۸, ۹) + \frac{۴}{۳}(۵, ۷, ۹) - (۶, ۸, ۱۰/۵) = ۰$$

۹. • قسمت اول:

$$LU = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۴ & -۱ \\ -۱ & -۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$R_2 - \frac{-1}{4}R_1 \to R_2 \quad \Rightarrow LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{-5}{4} \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - \frac{-1}{4}R_1 \to R_3 \quad \Rightarrow LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & \frac{-5}{4} & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$$

$$R_3 - \frac{-1}{3}R_2 \to R_3 \quad \Rightarrow LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

- قسمت دوم:

می‌دانیم $A = LDL^T$. که D یک ماتریس قطری است. یعنی $U = DL^T$. با اندکی محاسبات می‌توان رسید که:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

پس می‌توان نوشت:

$$A = \hat{L}\hat{L}^T \quad \Rightarrow \quad \hat{L} = LD^{\frac{1}{2}}$$

و به راحتی می‌توان $\hat{L}$ را محاسبه کرد.

۱۰.
- قسمت اول:

می‌دانیم برای هر ماتریس پایین مثلثی داریم:

$$a_{ij} = 0 \qquad i < j$$

فرض کنید A و B ماتریس پایین مثلثی دلخواه $n \times n$ و C حاصل ضرب آن دو است.

$$C = A \times B$$

کافی است ثابت کنیم:

$$i < j : \quad C_{ij} = 0$$

می دانیم C_{ij} حاصل‌ضرب داخلی سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B است. $n - i$ درایه آخر سطر iام ماتریس A صفر است. همین‌طور $j - 1$ درایه اوّل ستون jام ماتریس B نیز صفر است. پس حاصل‌ضرب داخلی این دو تا زمانی که $(n-i) + (j-1) \geqslant n$ باشد، صفر است. پس:

$$if \;\; n - i + j - 1 \geqslant n \Rightarrow C_{ij} = 0$$

$$j \geqslant i+1 \Rightarrow j > i$$

- قسمت دوم:
می‌دانیم برای هر ماتریس پایین مثلثی واحد داریم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

فرض کنید A و B دو ماتریس پایین مثلثی واحد $n \times n$ دلخواه باشند. اگر ماتریس C را حاصل‌ضرب آن دو تعریف کنیم، از آن‌جایی که A و B هر دو پایین مثلثی هستند، طبق قسمت قبل، ماتریس C هم پایین مثلثی است.
پس کافی است ثابت کنیم: $C_{ii} = 1$
می‌دانیم:

$$C_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{ji}$$

و از آن‌جایی که A و B نیز پایین مثلثی هستند پس:

$$\left.\begin{matrix} if \quad j > i \rightarrow a_{ij} = 0 \\ if \quad j < i \rightarrow b_{ij} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow if \quad a_{ij} \times b_{ij} = 0$$

پس:

$$C_{ii} = a_{ij}.b_{ji} = 1 \times 1 = 1$$

- قسمت سوم:
فرض کنید A معکوس ماتریس غیر تکین L باشد. در این صورت داریم $LA = I$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{(n-1)1} & & & l_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ l_{n1} & & \dots & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & \dots & I_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \forall i : \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{(n-1)1} & & & l_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ l_{n1} & & \dots & & l_{nn} \end{bmatrix} a_i = I_i \quad (1)$$

زیرماتریس $k \times k$ $(k \leqslant n)$ از L که از L_{11} شروع می‌شود را در نظر گرفته آن را $L^{(k)}$ بنامید. با توجه به (۱) داریم:

$$\Rightarrow \quad L^{(i-1)} \times \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{(i-1)i} \end{bmatrix} = 0$$

همچنین از آن‌جایی که L ماتریس غیرتکین است $L_{jj} \neq ۰$ ، پس هر $L^{(k)}$ ای نیز غیرتکین است. بنابراین تساوی بالا فقط زمانی امکان دارد که تساوی زیر برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} a_{۱i} \\ a_{۲i} \\ \vdots \\ a_{(i-۱)i} \end{bmatrix} = ۰$$

در نتیجه برای ماتریس A خواهیم داشت:

$$a_{ji} = ۰ \quad if \;\; j < i$$

که خود نشان‌دهنده پایین مثلثی بودن A است.
حال فرض کنید L علاوه بر پایین مثلثی بودن، واحد هم هست. در این صورت باتوجه به اثبات فوق واضح است که معکوس آن پایین مثلثی است. برای اثبات واحد بودن:

$$LA = I \quad \Rightarrow \forall i : \sum_{j=۱}^{n} l_{ij}.a_{ji} = ۱$$

همانند قسمت قبل در نهایت خواهیم داشت:

$$l_{ii} \times a_{ii} = ۱$$

و با توجه به واحد بودن L داریم:

$$\Rightarrow \;\; ۱ \times a_{ii} = ۱ \;\; \Rightarrow a_{ii} = ۱$$

پس A ماتریس پایین مثلثی با قطر ۱ است.